Schriftliche Abschlussprüfung 1999 **-Fachoberschule-**
Fach: M a t h e m a t i k http://www.kay79.de
-Technik-

Pflichtaufgaben:

1. Die Gleichung $y = f_a(x) = \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{4}{x} - 2 \qquad x \in R, x \neq 0; \quad a \in R, a \geq 0$ beschreibt eine Kurvenschar. Ihre Graphen werden mit K_a bezeichnet. Diese besitzen an der Stelle x_0 eine Polstelle.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion auf Schnittpunkte mit der x – Achse und geben Sie diese in Abhängigkeit von *a* an! (Beachten Sie: $a = 0$, $a > 0$)

1.2 Ermitteln Sie nun die Koordinaten des Extrempunktes von K_a (Nachweis!) und auch die Koordinaten des Wendepunktes von K_a (ohne Nachweis) jeweils in Abhängigkeit von *a*!

1.3 Untersuchen Sie die Funktionen im Unendlichen! Deuten Sie das Ergebnis geometrisch!

1.4 Setzen Sie jetzt $a = 4$!
Zeichnen Sie K_4 in ein Koordinatensystem im Intervall $-6 \leq x \leq 6$! (1 LE = 1cm)

1.5 Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem die Parallelen zur *y*-Achse durch $x = 1$ und $x = 4$ und die Gerade $y = -2$! Die Parallelen zur *y*-Achse, die Gerade $y = -2$ und der Graph K_4 begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

2 Zwei Wandergruppen *A* und *B* befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Punkten A_0 (0; 0) bzw. B_0 (25; 0). Siehe Skizze (nicht maßstäblich!) (Koordinateneinheit: 1 km)

Die Gruppe A wandert mit konstanter Geschwindigkeit $v_A = 3$ km/h,
die Gruppe B wandert mit konstanter Geschwindigkeit $v_B = 5$ km/h. (vgl. Skizze)

2.1 Wie lauten die Standortkoordinaten der beiden Gruppen nach 2 Stunden?

2.2 Berechnen Sie, wie weit die Wandergruppen nach 2 Stunden voneinander entfernt sind!

2.3 Nach wieviel Stunden haben die beiden Gruppen die geringste Entfernung voneinander? (Auf den Nachweis wird verzichtet!)

Schriftliche Abschlussprüfung 1999 **-Fachoberschule-**
Fach: M a t h e m a t i k http://www.kay79.de
-Technik-

Wahlaufgaben: Von diesen Aufgaben muss nur eine gelöst werden!

3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A (4; -2), B (8; 6) und C (1; 4) gegeben.

3.1 Geben Sie für die Geraden durch die Punkte A und B, A und C, sowie durch B und C je eine Gleichung in der vektoriellen Form und in der kartesischen Normalform an!

3.2 Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC!

3.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks!

3.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes L der Höhe h_c auf der Seite $\overline{AB}$!

4 Die Funktion f sei mit $y = f(x) = 2 \cdot \cos^2 x + \sin x$; $0 \leq x \leq 2\Pi$ gegeben.

4.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Schnittpunkte mit der x-Achse und geben Sie diese an!

4.2 Berechnen Sie die Extrempunkte von f und weisen Sie deren Art nach!

4.3 Skizzieren Sie den Graph von f im vorgegebenen Intervall!

4.4 Weisen Sie nach, dass die Funktion $F: F(x) = x + 0{,}5 \cdot \sin 2x - \cos x$ eine Stammfunktion von f ist!

Lösungshinweise:

1.1 **Nullstellen:** $0 = \dfrac{a-4x-2x^2}{x^2}$ $\quad 0 = a - 4x - 2x^2$ $\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+\dfrac{a}{2}}$

für a = 0: $x_1 = 0$ entfällt $x_2 = -2$ → $P_x(-2\,;\,0)$

für a > 0: $P_{x1}\left(-1-\sqrt{1+\dfrac{a}{2}};0\right)$ $\quad P_{x2}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{a}{2}};0\right)$

1.2 **Extrem- und Wendepunkt:**

$f_a(x) = ax^{-2} - 4x^{-1} - 2$ $\quad f'_a(x) = -2ax^{-3} + 4x^{-2}$

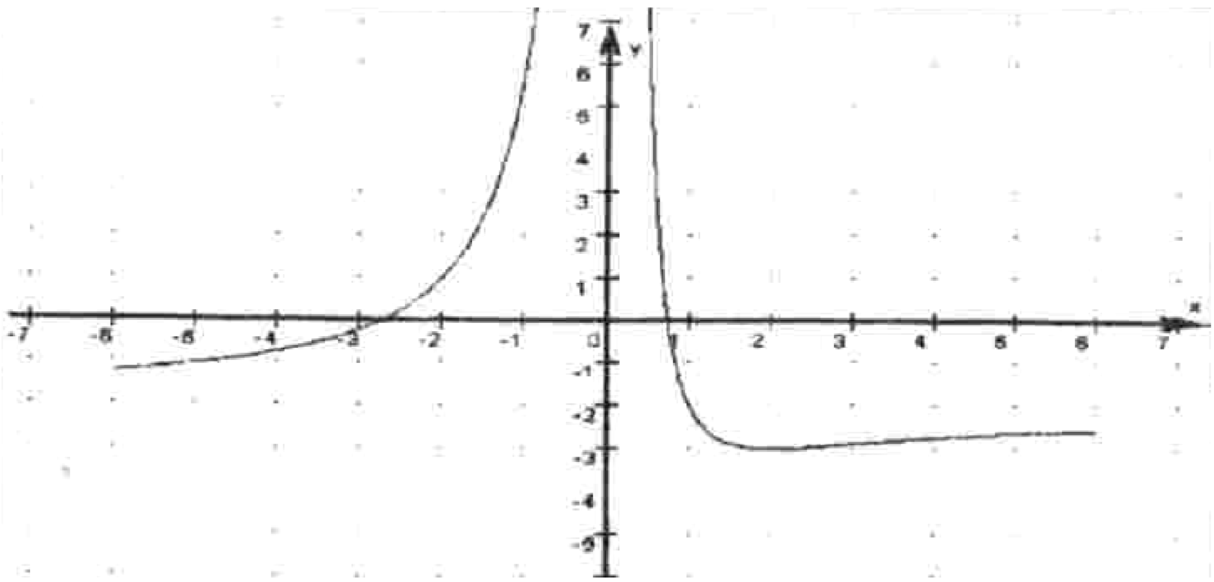
$f''_a(x) = 6ax^{-4} - 8x^{-3}$ $\quad f'''_a(x) = -24ax^{-5} + 24x^{-4}$

$P_{Min}\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{4}{a}-2\right)$ $\quad P_W\left(\dfrac{3a}{4};-\dfrac{32}{9a}-2\right)$

1.3 **Verhalten im Unendlichen**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{4}{x}-2\right) = -2$; d.h. die Gerade y = -2 ist Asymptote.

1.4 **Graph:**



1.5 **Flächenberechnung:**

$$A = \int_1^4 \left[-2-\left(\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}-2\right)\right]dx = \left[\frac{4}{x}+\ln x\right]_1^4 = 2{,}54\,FE$$

2.1 A$_2$(0; 6) B$_2$(15; 0)

2.2 $\overline{A_2B_2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 16{,}155\,km$

2.3 $s(t) = \sqrt{625 - 250t + 34t^2}$ $s'(t) = \dfrac{-250 + 68t}{2\sqrt{625 - 250t + 34t^2}}$ $t = 3{,}675$h

3.1 g$_{AR}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $y = 2x - 10$

g$_{AC}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $y = -2x + 6$

g$_{BC}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $y = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{26}{7}$

3.2 $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \dfrac{36}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{45}}$ $\alpha = 53{,}13°$

$\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \dfrac{44}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{53}}$ $\beta = 47{,}49°$

$\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \dfrac{9}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{53}}$ $\gamma = 79{,}38°$

3.3 g$_{AN}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$ g$_{CM}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$S\left(\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

3.4 g$_{CL}$: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$ g$_{AB}$: $y = 2x - 10$

$$L\left(\frac{29}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

4.1 **Nullstellen:**

$0 = 2\cos^2 x + \sin x$

$0 = \sin^2 x - 0{,}5 \sin x - 1$

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin x = 1{,}2808 \in L$$

$$\sin x = -0{,}7808 \quad \Rightarrow \quad x = 231{,}33°$$

$$x = 308{,}67°$$

4.2 **Extrempunkte:**

$$f'(x) = -4\sin x \cdot \cos x + \cos x = \cos x(-4\sin x + 1)$$
$$f''(x) = -4(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x$$

$0 = \cos x$ → $x_{E1} = 90°$ $x_{E2} = 270°$

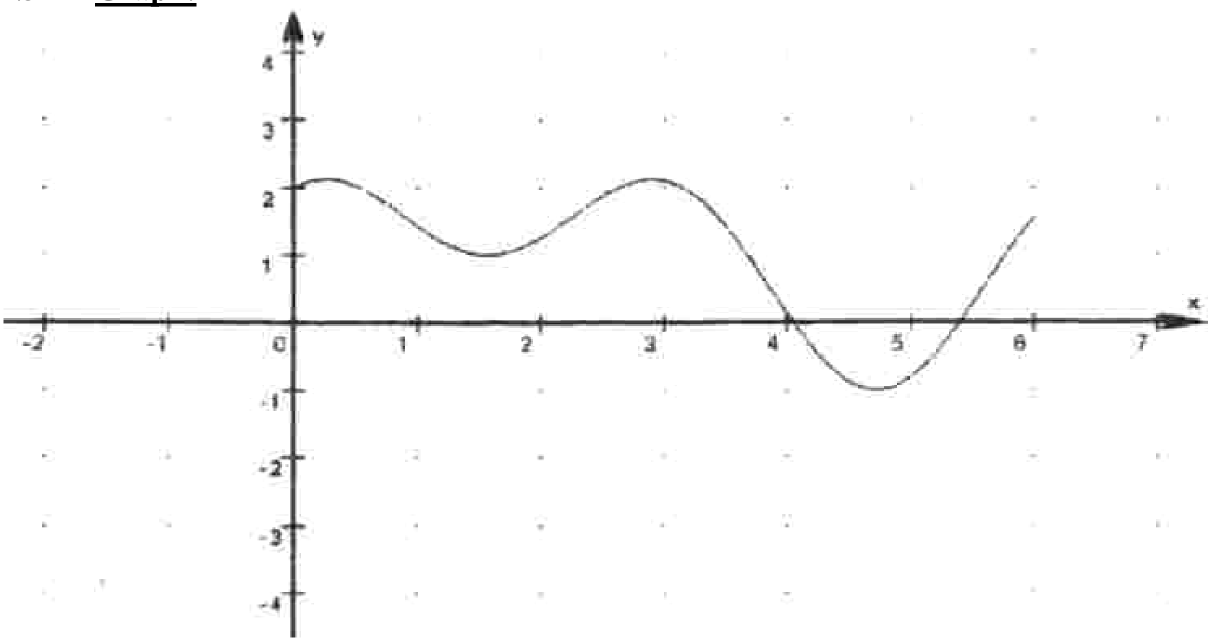
$0 = -4 \sin x + 1$ → $x_{E3} = 14{,}48°$ $x_{E4} = 165{,}52°$

Nachweis:

$$f''(x_{E1}) > 0 \quad \Rightarrow \quad lok.Minimum \qquad f''(x_{E2}) > 0 \quad \Rightarrow \quad lok.Minimum$$
$$f''(x_{E3}) < 0 \quad \Rightarrow \quad lok.Maximum \qquad f''(x_{E4}) < 0 \quad \Rightarrow \quad lok.Maximum$$

$P_{Min1}(90°; 1)$ $P_{Min2}(270°; -1)$ $P_{Max1}(14{,}48°; 2{,}125)$ $P_{Max2}(165{,}52°; 2{,}125)$

4.3 **Graph:**



4.4 **Nachweis:**

$$F'(x) = [x + 0{,}5\sin 2x - \cos x]' = 1 + 0{,}5 \cdot 2\cos 2x + \sin x = 1 + (2\cos^2 x - 1) + \sin x = 2\cos^2 x + \sin x = f(x)$$